6 Dimostra che l'equazione

$$\ln x + \cos x + x = 0$$

ha un'unica soluzione reale. Determina un intervallo di ampiezza minore di $\frac{1}{2}$ che contenga la soluzione.

6 Poniamo $f(x) = \ln x + \cos x + x$. La funzione così definita ha per dominio $\mathbb{R}^+$ ed è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

esiste almeno un intervallo $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$ per cui $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$; pertanto per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un $x_0 \in]a; b[$ tale che $f(x_0) = 0$.
Determiniamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x + 1.$$

Poiché $\frac{1}{x} > 0 \wedge (1 - \operatorname{sen} x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, allora $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ e la funzione è monotona crescente. Dunque la funzione si annulla una volta soltanto e l'equazione data ha un'unica soluzione.
L'intervallo $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ soddisfa le condizioni richieste; infatti:

L'ampiezza è $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $\quad f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.