PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

PROBLEMA 2

1. Una funzione è continua in un punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. In questo caso, poiché la funzione ha come campo di esistenza $x \geq 0$, esaminiamo la continuità a destra di 0. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} x^2(3 - 2\log x) + 1 = 1 = f(0).$$

Infatti per il teorema di De L'Hopital si ha $\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x = 0$. La funzione è continua in 0.

Una funzione è derivabile in un punto x_0 se esiste ed è finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In questo caso:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{2} h^2(3 - 2\log h) + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2} h(3 - 2\log h) = 0$$

quindi la funzione è derivabile in 0.

2. $Df(x) = \frac{1}{2}\left(2x(3 - 2\log x) - \frac{2}{x} x^2\right) = 2x(1 - \log x)$, quindi la funzione è crescente quando $\log x < 1$, cioè in $]0; e[$, mentre è decrescente in $]e; +\infty[$. In $x = e$ c'è un punto di massimo: $f(e) = \frac{1}{2} e^2 + 1 > 0$. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = [+\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$. In $]1; +\infty[$, quindi, la funzione deve attraversare l'asse x per il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, essendo la funzione decrescente in tale intervallo, il punto di intersezione tra la funzione e l'asse x è unico.

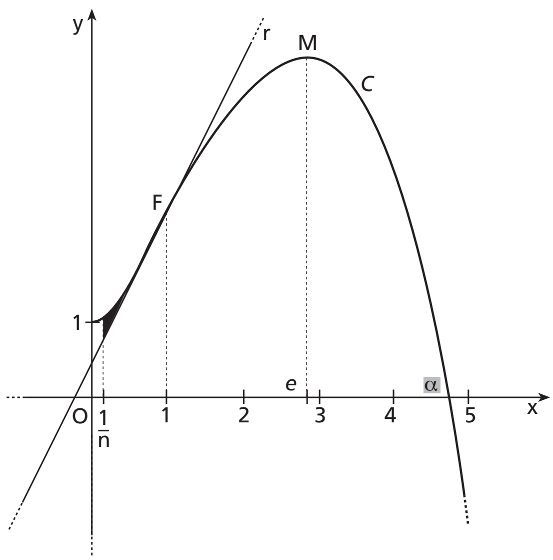
Per stimare il valore della soluzione si può procedere, per esempio, con il metodo di bisezione. Notiamo innanzitutto che $f(4) \simeq 2{,}82 > 0$, mentre $f(5) \simeq -1{,}74 < 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$	$(a+b)/2$	$f[(a+b)/2]$
4	2,82	5	−1,74	4,5	0,92
4,5	0,92	5	−1,74	4,75	−0,31
4,5	0,92	4,75	−0,31	4,625	0,33

E così via fino alla precisione voluta (la soluzione è circa 4,6901).

3. Per disegnare C, oltre ad utilizzare gli elementi studiati nel punto 2, calcoliamo $f''(x) = 2\left[1 - \log x + x\left(-\frac{1}{x}\right)\right] = -2\log x$. La concavità è rivolta verso l'alto quando $-2\log x > 0$, cioè quando $x < 1$, mentre è rivolta verso l'alto per $x > 1$. In $x = 1$ c'è un punto di flesso obliquo ($f'(1) = 2$). La generica retta tangente alla curva $f(x)$ in un punto x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Sostituendo $x_0 = 1$ si ottiene $y - \frac{5}{2} = 2(x - 1)$ *quindi* $y = 2x + \frac{1}{2}$ (tangente inflessionale).

Rappresentiamo il grafico di C (figura 3)



▲ **Figura 3.**

4. L'area A_n richiesta è data dal seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]dx=$$
$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1-2x-\frac{1}{2}\right]dx.$$
$$=\int\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1-2x-\frac{1}{2}\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x-\int x^2\log x\,dx=$$

$=$ (*integrando per parti*)

$$\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}\log x+\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$
$$=\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}\log x+\frac{x^3}{9}+c=$$
$$=\frac{11}{18}x^3-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}\log x+c.$$

L'area richiesta è $A_n=\left[\frac{11}{18}x^3-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=\frac{1}{9}-\frac{11}{18}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\log n$

5. Calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$. Si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\frac{1}{9}$ perché il secondo, il terzo e il quarto termine nel limite sono della forma $\left[\frac{a}{+\infty}\right]$, mentre l'ultimo tende a 0 per la regola del confronto tra infiniti. Visto che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, il risultato ottenuto rappresenta

$$\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+\frac{1}{2}-2x\right]dx,$$

che geometricamente si può interpretare come l'area compresa tra la curva e la retta r tra 0 e 1.