7 Data la funzione: $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 3x$, calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

7 Si calcolano i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to+\infty}(e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} - \frac{3x}{e^x}\right)$,

poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0$ per il teorema del confronto e $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{e^x} = 0$ per il teorema di De L'Hospital, risulta $\lim_{x\to+\infty}(e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = +\infty$;

b) $\lim_{x\to-\infty}(e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = +\infty$, essendo $\operatorname{sen} x$ una funzione limitata ed $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$.

Per la seconda parte della domanda, si calcola $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = e - \operatorname{sen} 1 - 3 < 0$. Poiché la funzione è continua si applica il teorema degli zeri ovvero esiste un valore $\alpha \in]0; 1[$ tale che $f(\alpha) = 0$.